BÀI 2 ƯỚC LƯỢNG VÀ KIỂM ĐỊNH GIÁ TRỊ TRUNG BÌNH CỦA MỘT BIẾN CHUẨN

I –NỘI DUNG

a- ƯỚC LƯỢNG THAM SỐ CỦA TỔNG THỂ

Khảo sát một đám đông gồm rất nhiều cá thể thuần nhất (theo nghĩa có cùng nguồn gốc hoặc chung sống khá lâu ở một vùng, thí dụ một giống cây ở một địa phương, một đàn gà trong một trại chăn nuôi, các em học sinh lớp 1 của một huyện, các bao đường của nhà máy đường v.v . . .).

Đo một hoặc nhiều chỉ số sinh học trên cá thể của đám đông được các biến ngẫu nhiên X, Y, Z , . . .Các biến này chia thành hai nhóm lớn: biến định tính và biến định lượng.

Đối với biến định lượng nhiều trường hợp qua khảo sát chúng ta biết dạng phân phối nhưng lại chưa biết tham số của phân phối đó.

Phổ biến nhất là trường hợp biến khảo sát được giả thiết phân phối chuẩn N(m,σ^2). Vấn đề còn lại là xác định hay còn gọi là ước lượng **m và σ^2**.

a1- Ước lượng tham số m của phân phối chuẩn N(m,σ^2)

Các bước cần làm:

Lấy một mẫu quan sát (mẫu ngẫu nhiên).

Sắp xếp số liệu và tính hai tham số: trung bình cộng $\bar{x}$, phương sai mẫu s^2 .

Chọn mức tin cậy của kết luận thống kê P (từ đó có mức ý nghĩa α = 1- P).

Trường hợp biết phương sai σ^2. Tìm trị u = u(α/2) sao cho Φ(u) = 1- α/2 từ bảng hàm phân phối chuẩn Φ(u)

$$\bar{x} - u\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le m \le \bar{x} + u\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Trường hợp không biết phương sai σ^2. Tìm t = t(α/2, n-1) từ bảng Student T

$$\bar{x} - t\frac{s}{\sqrt{n}} \le m \le \bar{x} + t\frac{s}{\sqrt{n}}$$

Ý nghĩa của khoảng ước lượng, mức tin cậy P và mức ý nghĩa α

Vì khoảng tin cậy dựa trên mẫu quan sát nên đây là một kết luận thống kê. Mỗi lần quan sát ta có một khoảng ước lượng, tức là một kết luận về m, kết luận đúng nếu m thực sự nằm trong khoảng đưa ra và sai khi m nằm ngoài khoảng ước lựong (khi trung bình cộng $\bar{x}$ quá nhỏ hay quá to so với trung bình m).

Xác suât đúng (hay còn gọi là mức đúng) là mức tin cậy P còn xác suất sai là mức ý nghĩa α.

a2- Ước lượng phương sai σ^2

Tính trung bình cộng $\bar{x}$, phương sai mẫu s^2 và hai trị trong phân phối χ^2

$$\chi^2_1 = \chi^2(\alpha/2, n-1) \quad \text{và} \quad \chi^2_2 = \chi^2(1-\alpha/2, n-1)$$

$$\frac{(n-1)s^2}{\chi_1^2} \le \sigma^2 \le \frac{(n-1)s^2}{\chi_2^2}$$

a3- Ước lượng xác suất p khi dung lượng mẫu n >= 30

Tính tần suất f = m /n và trị $u(\alpha/2)$

$$f - u(\alpha/2)\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}} \le p \le f + u(\alpha/2)\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}}$$

b- KIỂM ĐỊNH GIẢ THIẾT

Giả thiết và đối thiết

Khi khảo sát một tổng thể (hoặc nhiều tổng thể) và xem xét một (hoặc nhiều) biến ngẫu nhiên có thể đưa ra một giả thiết nào đó liên quan đến phân phối của biến ngẫu nhiên hoặc nếu biết phân phối rồi thì đưa ra giả thiết về tham số của phân phối đó. Để có thể đưa ra một kết luận thống kê đối với giả thiết thì phải chọn mẫu ngẫu nhiên, tính tham số mẫu, chọn mức ý nghĩa α sau đó đưa ra kết luận.

Bài toán kiểm định tham số Θ của một phân phối có dạng:

Căn cứ vào kết quả nghiên cứu đưa ra giả thiết H_o: $\Theta = \Theta_o$ với Θ_o là một tham số đã cho. Kết luận thống kê có dạng:"chấp nhận H_o" hay "bác bỏ H_o". Nhưng nếu đặt vấn đề như vậy thì cách giải quyết hết sức khó vì nếu không chấp nhận H_o: $\Theta = \Theta_o$ thì điều đó có nghĩa có thể chấp nhận một trong vô số Θ khác Θ_o, do đó thường đưa ra bài toán dưới dạng cụ thể hơn nữa: cho giả thiết H_o và đối thiết H_1, khi kết luận thì hoặc chấp nhận H_o hoặc bác bỏ H_o, và trong trường hợp này, tuy không hoàn toàn tương đương, nhưng coi như chấp nhận đối thiết H_1.

Nếu chấp nhận H_o trong lúc giả thiết đúng là H_1 thì mắc ***sai lầm loại hai*** và xác suất mắc sai lầm này được gọi là rủi ro loại hai β. Ngược lại nếu bác bỏ H_o trong lúc giả thiết đúng chính là H_o thì mắc ***sai lầm loại một*** và xác suất mắc sai lầm đó gọi là rủi ro loại một α..

Có thể đưa ra sơ đồ sau:

Quyết định **Giả thiết**	**Bác bỏ H_o**	**Chấp nhận H_0**
H_o đúng	**Sai lầm loại 1** α	**Quyết định đúng** *$P = 1-\alpha$ = xác suất chấp nhận H_0 gọi là mức tin cậy*
H_0 sai	**Quyết định đúng** *$1-\beta$ = xác suất bác bỏ H_0 gọi là lực lượng của kiểm định*	**Sai lầm loại 2** β

Như vậy trong bài toán kiểm định giả thiết luôn luôn có hai loại rủi ro, loại một và loại hai, tuỳ vấn đề mà nhấn mạnh loại rủi ro nào. Thông thường người ta hay tập trung chú ý vào **sai lầm loại một** và khi kiểm định phải khống chế sao cho **rủi ro loại một** không vượt quá một mức α gọi là **mức ý nghĩa**.

Trước hết xem xét cụ thể bài toán kiểm định giả thiết H_0: $\Theta = \Theta_o$, đối thiết H_1: $\Theta = \Theta_1$ với Θ_1 là một giá trị khác Θ_o. Đây là bài toán kiểm định giả thiết đơn.

Quy tắc kiểm định căn cứ vào hai giá trị cụ thể Θ_1 và Θ_o, vào mức ý nghĩa α và còn căn cứ vào cả sai lầm loại hai. Việc này về lý thuyết thống kê không gặp khó khăn gì.

Sau đó mở rộng quy tắc sang cho bài toán kiểm định giả thiết kép H_1: $\Theta \neq \Theta_o$; $\Theta > \Theta_o$ hoặc $\Theta < \Theta_o$, việc mở rộng này có khó khăn nhưng các nhà nghiên cứu lý thuyết xác suất thống kê đã giải quyết được do đó về sau khi kiểm định giả thiết $H_0 : \Theta = \Theta_o$ có thể chọn một trong 3 đối thiết H_1 sau:

H_1 : $\Theta \neq \Theta_o$ gọi là đối thiết hai phía hay hai đuôi(Two side hay two tail)

H_1 : $\Theta > \Theta_o$ gọi là đối thiết phải.

H_1 : $\Theta < \Theta_o$ gọi là đối thiết trái .

Hai đối thiết sau gọi là đối thiết một phía.hay một đuôi (one side hay one tail)

Việc chọn đối thiết nào tuỳ thuộc vấn đề khảo sát cụ thể.

b1- Kiểm định giá trị trung bình m của biến phân phối chuẩn N (m, σ^2).

Trường hợp 1: Kiểm định giả thiết H_0: m = m_0 khi biết phương sai σ^2

Tiến hành các bước sau:

+ Chọn mẫu dung lượng n, tính trung bình cộng $\bar{x}$

+ Chọn mức ý nghĩa α, tìm giá trị tới hạn u (α/2) trong bảng hàm Φ(u).

(Nếu kiểm định một phía thì tìm u (α) sao cho Φ(u) = 1- α)

+ Tính giá trị thực nghiệm U_{tn} = $\dfrac{(\bar{x}-\mu_0)}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \dfrac{(\bar{x}-\mu_0)\sqrt{n}}{\sigma}$

Kết luận:

Với H_1: **m ≠ m_0** (Kiểm định hai phía)

Nếu $|U_{tn}|$ (giá trị tuyệt đối của U_{tn}) nhỏ hơn hay bằng u(α/2) thì chấp nhận H_o nếu ngược lại thì bác bỏ H_0, tức là chấp nhận H_1.

Với H_1: **m > m_0** (Kiểm định một phía)

Nếu U_{tn} nhỏ hơn hay bằng giá trị tới hạn u (α) thì chấp nhận H_0, ngược lại thì chấp nhận H_1.

Với H_1: **m < m_0** (Kiểm định một phía)

Nếu U_{tn} lớn hơn hay bằng giá trị tới hạn - u(α) thì chấp nhận H_0, ngược lại thì chấp nhận H_1.

Trường hợp 2: Kiểm định giả thiết H_0: m = m_0 khi không biết phương sai

Đây là trường hợp phổ biến khi kiểm định giá trị trung bình của phân phối chuẩn. Tiến hành các bước sau:

+ Lấy mẫu, tính $\bar{x}$ và s^2

+ Tính giá trị T thực nghiệm T_{tn} = $\dfrac{(\bar{x}-\mu_0)\sqrt{n}}{s}$

+ Tìm giá trị tới hạn t (α/2, n-1) trong bảng 3.
(nếu kiểm định 2 phía thì tìm t (α, n-1))

Kết luận:

Với $H_1 : m \neq m_0$ (Kiểm định hai phía)

Nếu $|T_{tn}|$ (giá trị tuyệt đối của T_{tn}) $\leq$ t(α/2,n-1) thì chấp nhận H_o nếu ngược lại thì bác bỏ H_o, tức là chấp nhận H_1

Với $H_1 : \mu > \mu_0$ (Kiểm định một phía)

Nếu T_{tn} t(α,n-1)$\leq$ t(α, n-1) thì chấp nhận H_0, ngược lại thì chấp nhận H_1

Với H_1: $\mu < \mu_0$ (Kiểm định một phía)

Nếu $T_{tn} \geq$ - t(α,n-1) thì chấp nhận H_0, ngược lại thì chấp nhận H_1.

Trường hợp 3: Kiểm định một xác suất H_0: p = p_0

Đối thiết hai phía H1: $p \neq p_0$

Tính $U_{tn}= \dfrac{(f-p_0)}{\sqrt{\dfrac{p_0(1-p_0)}{n}}}$ rồi so với giá trị tới hạn hai phía u= u(α/2)

Nếu $|Utn| \leq u$ thì chấp nhận H_0 Nếu $|Utn| > u$ thì bác bỏ H_0

Nếu đối thiết một phía H_1: $p > p_0$ hay $p < p_0$ thì phải so với giá trị tới hạn một phía u = u(α) tính từ đẳng thức $\Phi(u) = 1- \alpha$

b2- So sánh hai trung bình của hai biến chuẩn

Khảo sát **một biến chuẩn** trên 2 tổng thể, trên tổng thể I được biến X phân phối **$N(m_X, \sigma^2_X)$** , trên tổng thể II được biến Y phân phối **$N(m_Y, \sigma^2_Y)$**

Để so sánh hay kiểm định giả thiết H_0: $m_y = m_x$ với đối thiết H_1: $m_Y \neq m_X$ (hoặc đối thiết một phía H_1: my > mx) có hai phương pháp lấy mẫu:

Phương pháp lấy mẫu theo cặp (đôi)

Dựa vào quan hệ tự nhiên (vợ chồng, anh em), hoặc quan hệ trước sau (trước khi chữa bệnh và sau khi chữa bệnh) hoặc do chủ động bố trí (đối chứng và thí nghiệm) chúng ta có một mẫu quan sát với n cặp số liệu, mỗi cặp gồm một số liệu của tổng thể thứ nhất gọi là x_i còn số liệu kia của tổng thể thứ hai gọi là y_i

Chuyển bài toán so sánh hai trung bình thành bài toán kiểm định đối với biến hiệu số D = Y - X

Từ n cặp số liệu (x_i, y_i) tạo ra cột hiệu số $d_i = y_i - x_i$

Tính trung bình cộng $\bar{d}$, độ lệch chuẩn s_d (hoặc dùng ký hiệu Dtb và s_D)

Để kiểm định giả thiết $H_0 : m_x = m_y$ đối thiết $H_1: m_x \neq m_y$ chúng ta chuyển sang $H_0 : m_d = 0$ đối thiết $H_1: m_d \neq 0$

Tính $T_{tn} = \frac{\bar{d} \times \sqrt{n}}{s_d}$ rồi so với giá trị tới hạn t = t(α/2,n-1)

Nếu $|Ttn| \leq t$ thì chấp nhận H_0 ngược lại thì bác bỏ H_0 .

Trường hợp một phía so Ttn với t(α,n-1).

Phương pháp lấy mẫu độc lập

Từ tổng thể I rút mẫu gồm n_x cá thể tính được trung bình $\bar{x}$, độ lệch chuẩn s_x, phương sai s^2_x (hoặc dùng ký hiệu xtb, s_X, s_X^2)

Từ tổng thể II rút mẫu gồm n_y cá thể tính được trung bình $\bar{y}$, độ lệch chuẩn s_y, phương sai s^2_y (hoặc dùng ký hiệu ytb, s_Y, s_Y^2)

Trường hợp 1: biết phương sai σ^2_x , σ^2_y

hoặc không biết phương sai nhưng mẫu lớn ($n_X \geq 30$; $n_Y \geq 30$)

Nếu biết phương sai

$$Utn = \frac{(\bar{y} - \bar{x})}{\sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n_X} + \frac{\sigma_Y^2}{n_Y}}}$$

Nếu không biết phương sai nhưng mẫu lớn

$$Utn = \frac{(\bar{y} - \bar{x})}{\sqrt{\frac{s_X^2}{n_X} + \frac{s_Y^2}{n_Y}}}$$

So $|Utn|$ với giá trị tới hạn hai phía u = u(α/2) khi kiểm định 2 phía

Nếu $|Utn| \leq u$ thì chấp nhận H_0, ngược lại thì bác bỏ H_0

Nếu kiểm định một phía thì so Utn và giá trị tới hạn một phía u= u(α).

Trường hợp 2: không biết phương sai và mẫu nhỏ

Trước hết phải kiểm định giả thiết $H_0 : \sigma^2_Y = \sigma^2_X$ với đối thiết $H_1: \sigma^2_Y \neq \sigma^2_X$

Giả sử $s^2_y > s^2_x$ lấy $Ftn = s^2_y / s^2_x$ sau đó tìm giá trị tới hạn Flt qua hàm

$F(\alpha, n_y-1, n_x-1)$, (nếu $s^2_x > s^2_y$ thì lấy $Ftn = s^2_x / s^2_y$ và $Flt = F(\alpha, n_x-1, n_y-1)$)

Nếu $Ftn \leq Flt$ thì chấp nhận H_0, ngược lại thì bác bỏ H_0.

Chấp nhận H_0 ta có trường hợp hai phương sai bằng nhau (equal variance),

ngược lại có trường hợp hai phương sai khác nhau (unequal variance).

Trường hợp 2a: hai phương sai bằng nhau

Giả thiết H_0: $m_y = m_x$ đối thiết $H_1 : m_Y \neq m_X$

Tính phương sai chung $s^2_c = ((n_x - 1) s^2_x + (n_y - 1) s^2_y)/(n_x + n_y - 2)$

Tính $T_{tn} = \dfrac{(\bar{y} - \bar{x})}{\sqrt{s_c^2(\dfrac{1}{n_x} + \dfrac{1}{n_y})}}$ rồi so với giá trị tới hạn 2 phía $t = t(\alpha/2, n_x + n_y - 2)$

Nếu $|Ttn| \leq t$ thì chấp nhận H_0 ngược lại thì bác bỏ.

Nếu kiểm định một phía H_1: $m_Y > m_X$ hay H_1: $m_Y < m_X$ thì so với giá trị tới hạn một phía $t = t(\alpha, n_x + n_y - 2)$.

Trường hợp 2b: hai phương sai khác nhau

Tính $T_{tn} = \dfrac{(\bar{y} - \bar{x})}{\sqrt{\dfrac{s_x^2}{n_x} + \dfrac{s_y^2}{n_y}}}$

Tính giá trị tới hạn hai phía $t = t(\alpha/2, Df)$ với bậc tự do Df tính như sau:

$v_x = s^2_x / n_x$; $v_y = s^2_y / n_y$

Tính tỷ số : $(v_x + v_y)^2 / (v^2_x / (n_x - 1) + v^2_y / (n_y - 1))$ sau đó quy tròn

Thí dụ : $s^2_x = 0{,}67$; $n_x = 4$; $s^2_y = 17{,}71$; $n_y = 8$

$v_x = 0.67/ 4 = 0.17$ $v_y = 17.71/ 8 = 2.21$ $v_x + v_y = 2.38$

Quy tròn: $2.38^2 /(0.17^2/3 + 2.21^2/ 7) \approx 8$ vậy bậc tự do Df là 8

Kết luận: Nếu $|Ttn| \le t$ thì chấp nhận H_0 ngược lại thì bácbỏ H_0.

Nếu kiểm định một phía thì so Ttn với giá trị tới hạn một phía $t = t(\alpha, Df)$.

b3- So sánh hai xác suất

Hai tổng thể có tỷ lệ cá thể loại A là p_1 và p_2

Để so sánh p_1 và p_2 chúng ta lấy 2 mẫu quan sát:

Mẫu 1 dung lượng n_1 lấy từ tổng thể I trong đó có m_1 cá thể loại A

Mẫu 2 dung lượng n_2 lấy từ tổng thể II trong đó có m_2 cá thể loại A

Giả thiết H_0: $p_1 = p_2$ đối thiết H_1: $p_1 \neq p_2$

Tính các tần suất $f_1 = m_1/n_1$ $f_2 = m_2 / n_2$ và tần suất chung

$$f = (m_1 + m_2)/ (n_1 + n_2)$$

$$Utn = \frac{(f_2 - f_1)}{\sqrt{f(1-f)(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2})}}$$ so với giá trị tới hạn hai phía $u(\alpha/2)$

Nếu $|Utn| \le u(\alpha/2)$ thì chấp nhận H_0

Nếu $|Utn| > u(\alpha/2)$ thì bác bỏ H_0

Nếu kiểm định một phía thì so Utn với giá trị tới hạn một phía $u(\alpha)$.

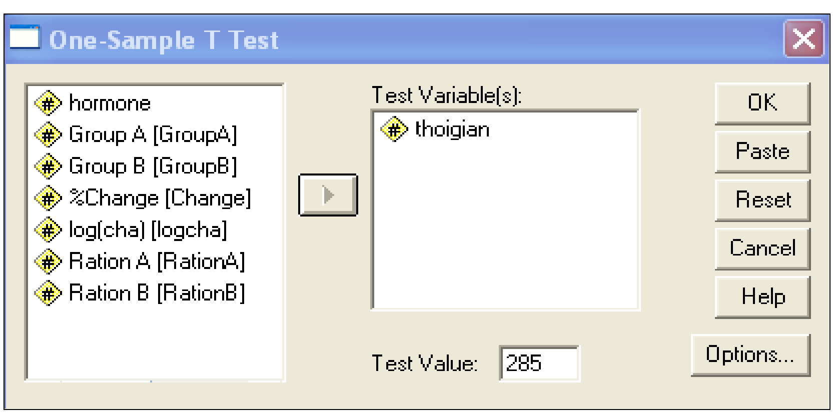
II XỬ LÝ TRONG SPSS

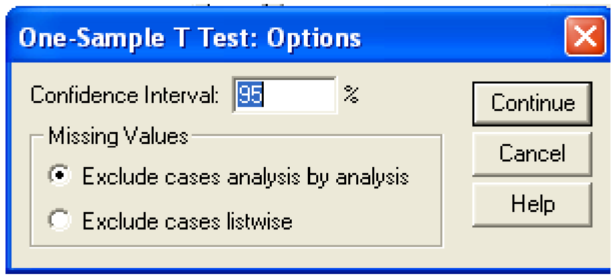
a- Ước lượng và kiểm định giá trị m của biến chuẩn

Mở tệp Baitap2 Vào Analyse Compare means One sample T-test

Chọn Thoigian (Thời gian mang thai của bò).

Test value (giá trị cần kiểm định) 285





One-Sample Statistics

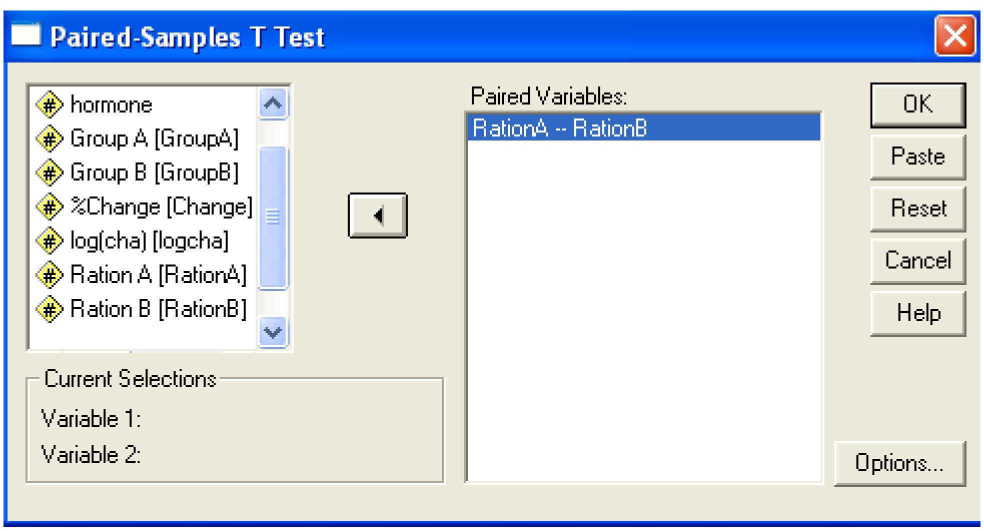
Biên	N	*T bình* Mean	*DL chuẩn* Std. Deviation	*Sai số chuẩn* Std. Error Mean
thoigian	6	294.50	7.740	3.160

One-Sample Test

	Giá trị cần kiểm định Test Value = 285					
	Ttn t	*Bậc tự do* df	*Mức ý nghĩa* Sig. (2-tailed)	*Hiệu số xtb -285* Mean Difference	*Khoảng tin cậy 95%* 95% Confidence Interval of the Difference	
					Cận dưới Lower	*Cận trên* Upper
thoigian	3.007	5	.030	9.500	1.38	17.62

b- So sánh cặp

Vào analyse Compare means Paired samples T-test. Chon Ration A và Ration B



Kết quả:

Paired Samples Statistics

		Mean	N	Std. Deviation	Std. Error Mean
Pair 1	Ration A	1.0387	15	.13352	.03447
	Ration B	1.1287	15	.11294	.02916

Paired Samples Correlations *(hệ số tương quan giữa 2 biến Ration A và Ration B)*

		N	Correlation	Sig.
Pair 1	Ration A & Ration B	15	.633	.011

Paired Samples Test

		Paired Differences				
					95% Confidence Interval of the Difference	
		Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean	Lower	Upper
Pair 1	Ration A - Ration B	-.09000	.10724	.02769	-.14939	-.03061

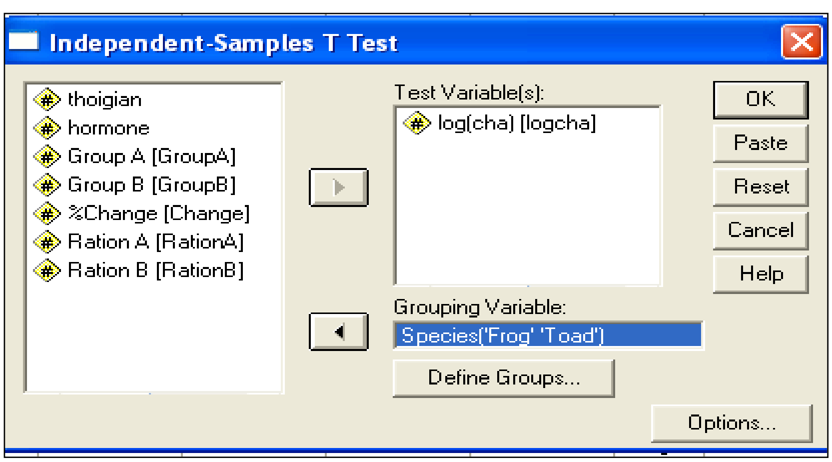
Ttn	*Bậc tự do*	*Mức ý nghĩa*
t	df	sig
-3.250	14	.006

c- So sánh hai giá trị trung bình của hai biến chuẩn khi lấy mẫu độc lập

Xét trọng lượng nước tăng thêm của hai loại lưỡng thê khi ngâm trong nước. Số liệu để trong một cột, có cột Species để phân biệt hai loại.

Vào analyse Compare means Independent samples T-test.

Chon Test variables Log(cha), grouping Variable Species Define groups nhập tên Cóc (Toad) và ếch (Frog)



Group Statistics

	Species	N	Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean
log(cha)	Frog	8	.635	.432	.153
	Toad	7	1.217	.394	.149

Independent Samples Test

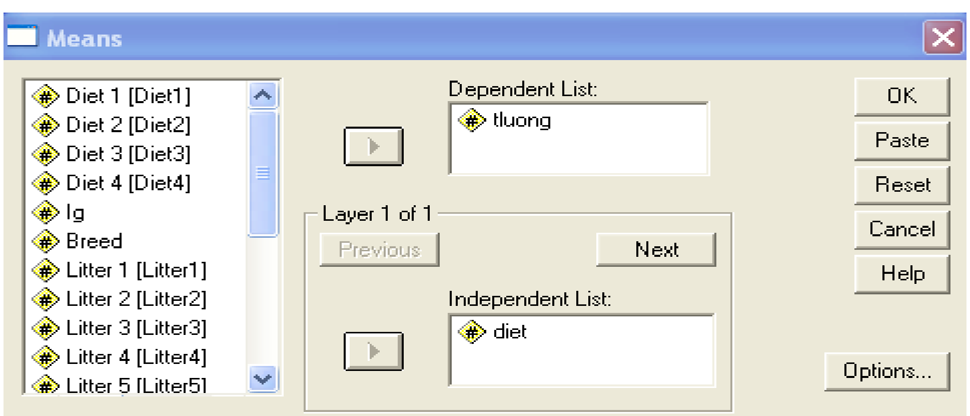
		Levene's Test for Equality of Variances		t-test for Equality of Means				
		F	Sig.	t	df	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	Std. Error Difference
log(cha)	Equal variances assumed	.324	.579	-2.712	13	.018	-.582	.215
	Equal variances not assumed			-2.730	12.964	.017	-.582	.213

t-test for Equality of Means						
					95% Confidence Interval of the Difference	
t	df	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	Std. Error Difference	Lower	Upper
-2.712	13	.018	-.582	.215	-1.046	-.118
-2.730	12.964	.017	-.582	.213	-1.043	-.121

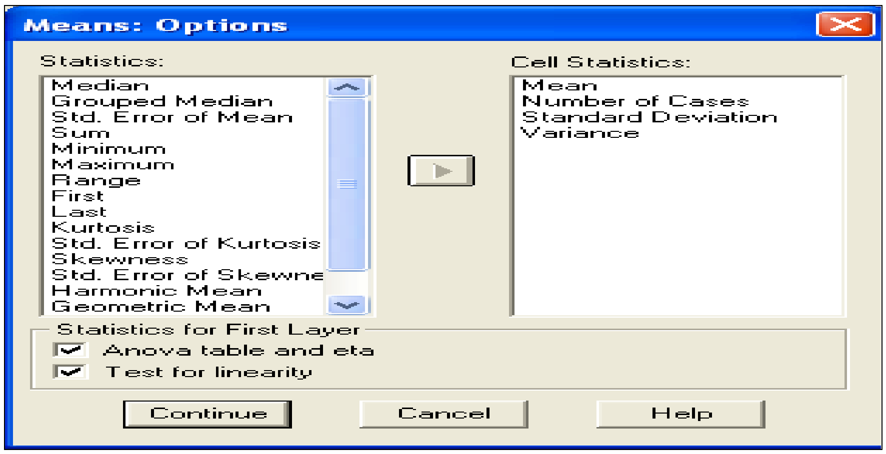
d- So sánh nhiều giá trị trung bình của các biến chuẩn khi lấy mẫu độc lập

Khi có hơn 2 biến chuẩn thì có thể tính các trung bình theo Analyse Compare means. Mở tệp Baitap3. Vào Analyse Compare means Means

Chọn biến Tluong vào Dependent list . Chọn diet vào Inedependent List



Trong options chọn các thống kê và các hệ số đo mối quan hệ giữa Diet và Tluong và phân tích toàn bộ biến động của Tluong thành 2 thành phần: Biến động do sự khác nhau giữa các loại thức ăn (diet) và biến động ngẫu nhiên (Giống Between group và Within group như trong one way anova) sau đó lại tách biến động đầu thành 2 phần: Biến động tuyến tính theo Diet, biến động còn lại sau khi tách biến động tuyến tính.



Report

tluong

diet	Mean	N	Std. Deviation	Variance
1	79.00	5	24.474	599.000
2	71.00	5	31.024	962.500
3	81.40	5	22.876	523.300
4	142.80	5	34.903	1218.200
Total	93.55	20	39.523	1562.050

ANOVA Table

			Sum Sq	Df	Mean sq	Ftn	Sig
tluong * diet	Between Groups	(Combined)	16466.950	3	5488.983	6.647	.004
	(Tuyến tính)	Linearity	10180.810	1	10180.810	12.329	.003
	(Còn lại)	Deviation from Linearity	6286.140	2	3143.070	3.806	.044
	Within Groups *(ngẫu nhiên)*		13212.000	16	825.750		
	Total		29678.950	19			

Measures of Association

	R	R Squared	Eta	Eta Squared
tluong * diet	.586	.343	.745	.555