Phương pháp lặp đơn

1) Chuẩn của ma trận:

Người ta thường dùng 3 chuẩn ma trận sau:

- Chuẩn cột:

$$\|A\|_1 = max_j \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|$$

- Chuẩn Ơ-clit:

$$\|A\|_2 = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{m,n} |a_{ij}|^2}$$

- **Chuẩn hàng:**

$$\|A\|_\infty = max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

Ví dụ 1: Tính các chuẩn của ma trận sau:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -5 \\ -3 & 8 \end{bmatrix}$$

- Chuẩn cột:

$$\|A\|_1 = \max\{|2| + |-4| + |-3|, |1| + |-5| + |8|\} = \max\{9,14\} = 14$$

- Chuẩn Ơ-clit:

$$\|A\|_2 = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-4)^2 + (-5)^2 + (-3)^2 + 8^2} = \sqrt{119}$$

- **Chuẩn hàng:**

$$\|A\|_\infty = \max\{|2| + |1|, |-4| + |-5|, |-3| + |8|\} = \max\{3,9,11\} = 11$$

2) Phương pháp lặp đơn:

- Điều kiện hội tụ: $\|A\|_p \le q < 1, p = 1,2,\infty$
- Công thức đánh giá sai số:

$$\left\|x^{(k)} - x^*\right\|_\infty \le \frac{\|A\|_\infty^k}{1 - \|A\|_\infty} \times \left\|x^{(1)} - x^{(0)}\right\|_\infty$$

$$\left\|x^{(k)} - x^*\right\|_\infty \le \frac{\|A\|_\infty}{1 - \|A\|_\infty} \times \left\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\right\|_\infty$$

3) Ma trận chéo trội:

Ma trận A = $\left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ được gọi là chéo trội nếu $|a_{ii}| > \sum_{i\neq j}|a_{ij}|$.

Tức là mỗi phần tử thuộc đường chéo chính của A đều lớn hơn tổng các phần tử còn lại về giá trị tuyệt đối.

Ví dụ 2: Xét ma trận $A = \begin{bmatrix} 10 & 4 & -2 \\ 4 & -10 & 5 \\ 4 & -3 & 8 \end{bmatrix}$

- Hàng 1 có |10| > |4| + |-2|
- Hàng 2 có |-10| > |4| + |5|
- Hàng 3 có |8| > |4| + |-3|

⇒ Ma trận A là ma trận chéo trội.

4) Bài tập:

Bài 1: Cho hệ phương trình: $\begin{cases} 10x_1 + 3x_2 + x_3 = 7.5 \\ -3x_1 + 10x_2 + x_3 = 9 \\ -x_1 + 2x_2 + 8x_3 = -2.5 \end{cases}$ (I)

Cho trước $X^{(0)} = [0, 0, 0]^T$, tìm nghiệm xấp xỉ của hệ phương trình trên sau 5 bước lặp và đánh giá sai số với nghiệm đúng $X^* = [0.5, 1, -0.5]^T$.

Giải:

Bước 1: Xác định điều kiện của ma trận chéo trội

Ta xét ma trận A = $\begin{bmatrix} 10 & 3 & 1 \\ -3 & 10 & 1 \\ -1 & 2 & 8 \end{bmatrix}$

- Hàng 1 có |10| > |3| + |1|
- Hàng 2 có |10| > |-3| + |1|
- Hàng 3 có |8| > |-1| + |2|
- ⇒ Ma trận A là ma trận chéo trội.

Bước 2: Đưa hệ phương trình về dạng: x = Bx + β

Hệ phương trình (I) ⇔ $\begin{cases} 10x_1 = 7.5 - 3x_2 - x_3 \\ 10x_2 = 9 + 3x_1 - x_3 \\ 8x_3 = -2.5 + x_1 - 2x_2 \end{cases}$

⇔ $\begin{cases} x_1 = 0.75 - 0.3x_2 - 0.1x_3 \\ x_2 = 0.9 + 0.3x_1 - 0.1x_3 \\ x_3 = -0.3125 + 0.125x_1 - 0.25x_2 \end{cases}$

⇒ B = $\begin{bmatrix} 0 & -0.3 & -0.1 \\ 0.3 & 0 & -0.1 \\ 0.125 & -0.25 & 0 \end{bmatrix}$

⇒ $\|B\|_\infty = max\{|-0.3| + |-0.1|, |0.3| + |-0.1|, |0.125| + |-0.25|\} =$ $\max\{0.4, 0.4, 0.375\} = 0.4 < 1$ (Thỏa mãn điều kiện hội tụ)

Dãy lặp: $X^{(n+1)} = B \times X^{(n)} + \beta$

Với $X^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \beta = \begin{bmatrix} 0.75 \\ 0.9 \\ -0.3125 \end{bmatrix}$

Ta lập bảng:

n	$\boldsymbol{X_1^{(n)}}$	$\boldsymbol{X_2^{(n)}}$	$\boldsymbol{X_3^{(n)}}$
0	0	0	0
1	0.75	0.9	-0.3125

2	0.51125	1.15625	-0.44375
3	0.4475	1.09775	-0.53766
4	0.47444	1.08801	-0.531
5	0.47669	1.09543	-0.52519

Bấm máy:

- *Xóa bộ nhớ máy tính: Shift 9 3 = =*
- *Chuyển chế độ tính ma trận: MODE 6*
- *Chọn 1 để nhập dữ liệu cho MatA (MatA chính là ma trận $X^{(0)}$)*
- *Chọn 3 (chọn size ma trận vì size $X^{(0)}$)*

$\rightarrow$ Nhập dữ liệu $\rightarrow$ Bấm AC để lưu dữ liệu.

- *Nhập dữ liệu tiếp cho ma trận B (đặt biến là MatB): Shift 4 2 2 1 $\rightarrow$ Bấm AC để lưu dữ liệu.*
- *Nhập dữ liệu tiếp cho ma trận β (đặt biến là MatC): Shift 4 2 3 3 $\rightarrow$ Bấm AC để lưu dữ liệu.*
- *Vì ta có công thức lặp là: $X^{(n+1)} = B \times X^{(n)} + \beta$*

Ta thấy X^{sau} được tính thông qua $X^{trước}$.

Nên $X^{(1)} = B \times X^{(0)} + \beta \Rightarrow MatB \times MatA + MatC$ (Đây là $X^{(1)}$, và sẽ là MatAns)

(Để hiển thị MatA, MatB, MatC và MatAns thì ta bấm Shift 4 3|4|5|6)

- *Để tính từ $X^{(2)}$ trở đi thì thay MatA ở công thức trên bằng MatAns*

MatB×MatAns+MatC

Đánh giá sai số:

Ta sử dụng công thức thứ 2:

$$\left\|x^{(k)} - x^*\right\|_\infty \le \frac{\|A\|_\infty}{1 - \|A\|_\infty} \times \left\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\right\|_\infty$$

$\left\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\right\|_\infty = \left\|x^{(5)} - x^{(4)}\right\|_\infty = \max\{|0.47669 - 0.47444|, |\ldots|, |\ldots|\}$

= 0.00742

⇒

$$\left\|x^{(5)} - x^*\right\|_\infty \le \frac{0.4}{1 - 0.4} \times 0.00742 \approx 0.00495$$

Lưu ý: Khi đề bài KHÔNG cho sẵn $X^{(0)}$ thì ta sử dụng $X^{(0)}$ = β (Thường chọn). Còn khi đề bài có $X^{(0)}$ thì ta buộc phải sử dụng nghiệm này!

Bài 2: Cho hệ phương trình: $\begin{cases} 10x_1 + 2x_2 - x_3 = 27 \\ 5x_1 + 3x_2 + 16x_3 = 3 \\ 3x_1 - 8x_2 + x_3 = -19 \end{cases}$

a) Hãy đưa hệ phương trình đã cho về dạng có ma trận hệ số đường chéo trội.
b) Sử dụng phương pháp lặp đơn, tìm vecto nghiệm gần đúng $X^{(3)}$ của hệ phương trình trên.
c) Tính sai số của nghiệm $X^{(3)}$ theo chuẩn hàng $\|.\|_\infty$.

Bài 3: Cho hệ phương trình: $\begin{cases} 10x_1 + 3x_2 - x_3 = -5 \\ 6x_1 - 20x_2 - 3x_3 = -49 \\ 2x_1 + 5x_2 + 14x_3 = 22 \end{cases}$

a) Đưa hệ trên về dạng ma trận X = β + αX với chuẩn hàng $\|\alpha\|_\infty < 1$. Tính $\|\alpha\|_\infty$.
b) Tính $X^{(1)}$, $X^{(2)}$ bằng phương pháp lặp đơn khi ta chọn $X^{(0)}$ = β.