Phương pháp lặp

1) Điều kiện hội tụ:

Giả sử (a, b) là khoảng phân ly nghiệm của phương trình (1): f(x) = 0.

Nếu (1) ⇔ x = φ(x) mà φ(x) thỏa mãn 3 điều kiện:

(1) φ(x) và φ'(x) cùng liên tục trong khoảng (a, b).

(2) φ(x) ∈ (a, b), ∀x ∈ (a, b).

(3) |φ'(x)| ≤ q < 1, ∀x ∈ (a, b).

Thì

- Dãy số $\{x_n = \varphi(x_{n-1}), n \geq 1\}$ sẽ hội tụ, với $x_0 \in (a, b)$.
- Và $\lim_{n\to\infty} x_n = x^*$, với x* là nghiệm đúng của (1).

2) Thuật toán:

Bước 1: Giả sử (a, b) là một khoảng phân ly nghiệm của (1). Biến đổi (1) về dạng x = φ(x) sao cho φ(x) thỏa mãn 3 điều kiện của điều kiện hội tụ.

Bước 2: Công thức gần đúng x_n là: $\begin{cases} x_0 \in (a,b) \text{ tùy ý} \\ x_n = \varphi(x_{n-1}), n \geq 1 \end{cases}$

3) Đánh giá sai số:

(1) $|x_n - x^*| \leq q^n \times (b - a)$.

(2) $|x_n - x^*| \leq \frac{q^n}{1-q} \times |x_1 - x_0|$

(3) $|x_n - x^*| \leq \frac{q}{1-q} \times |x_n - x_{n-1}|$

Dạng 1: Không có sai số ε, đề yêu cầu tìm nghiệm gần đúng x_n:

Ví dụ 1: Cho phương trình $x = \sqrt{2x + 5}$

Tính đến x_3 là nghiệm gần đúng của phương trình bằng phương pháp lặp trên khoảng (3, 4), với $x_0 = 3.4$

Đánh giá sai số của x_3.

Giải:

Bước 1: Chứng minh điều kiện hội tụ:

Xét $\varphi(x) = \sqrt{2x+5}$, ta chứng minh φ(x) thỏa mãn 3 điều kiện của phương pháp lặp:

(1). $\forall x \in (3, 4) \Rightarrow \varphi(x) \in (\sqrt{11}, \sqrt{13})$ hay $\varphi(x) \in (3.3166, 3.6056)$

$\Rightarrow \varphi(x) \in (3, 4)$.

(2). $\varphi(x) = \sqrt{2x+5} \ \rightarrow \ \varphi'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+5}}$, φ(x) và φ'(x) liên tục trên (3, 4).

(3). Tìm hệ số q:

$\forall x \in (3, 4) \rightarrow |\varphi'(x)| \in \left(\frac{1}{\sqrt{11}}, \frac{1}{\sqrt{13}}\right)$ hay $\varphi'(x) \in (0.2774, 0.3015)$

Chọn q = 0.31 thỏa mãn $|\varphi'(x)| \leq q = 0.31 < 1$.

Bước 2: Xây dựng dãy lặp:

Dãy lặp: $\varphi(x_n) = \varphi(x_{n-1}) = \sqrt{2x_{n-1} + 5}$, với $x_0 = 3.4 \in (3, 4)$.

Ta lập bảng:

n	**$\varphi(x_n)$**
0	3.4
1	3.43511
2	3.44532
3	3.44828

Kết luận: $x_3 \approx 3.44828$.

Bấm máy:

- *Xóa bộ nhớ: Shift 9 3 = =*
- *Lập công thức:*

$$Y = \sqrt{2X+5}: X = Y$$

- *Bấm CALC để nhập X (đây chính là x_0)*
- *Bấm = để có được x_1.*

Đánh giá sai số tại x_3:

Sử dụng 1 trong 2 công thức đánh giá sai số:

(1). $|x_n - x^*| \le q^n \times (b - a)$.

(2). $|x_n - x^*| \le \frac{q^n}{1-q} \times |x_1 - x_0|$

Ta có: $|x_3 - x^*| \le 0.31^3 \times (4 - 3)$

$\Leftrightarrow |x_3 - x^*| \le 0.02979$

Dạng 2: Có cho trước sai số ε, thường sẽ không chỉ định tính đến x_n, mà sẽ phải áp dụng công thức sai số.

Sử dụng 1 trong 2 công thức đánh giá sai số:

(1). $|x_n - x^*| \le q^n \times (b - a) \le \varepsilon$.

(2). $|x_n - x^*| \le \frac{q^n}{1-q} \times |x_1 - x_0| \le \varepsilon$

Ví dụ 2: Cho phương trình $x^3 - x - 1 = 0$. Chọn $\varphi(x) = (1+x)^{1/3}$. Chứng tỏ rằng $\varphi(x)$ thỏa mãn điều kiện hội tụ của phương pháp lặp trong khoảng phân ly (1, 2). Để đạt được độ chính xác $\varepsilon = 10^{-4}$ thì cần ít nhất bao nhiêu bước lặp. Tìm nghiệm gần đúng đó.

Bước 1: Chứng minh điều kiện hội tụ:

Xét φ(x) = $(1+x)^{1/3}$, ta chứng minh φ(x) thỏa mãn 3 điều kiện của phương pháp lặp:

(1). ∀x ∈ (1, 2) thì φ(x) ∈ (1.2599, 1.4422) ⇒ φ(x) ∈ (1, 2).

(2). φ(x) = $(1+x)^{1/3} \rightarrow \varphi'(x) = \frac{1}{3} \times (1+x)^{-2/3}$, φ(x) và φ'(x) liên tục trên (1, 2).

(3). Tìm hệ số q:

∀x ∈ (1, 2) thì |φ'(x)| ∈ (0.1602, 0.2099).

Chọn q = 0.21 thỏa mãn: |φ'(x)| ≤ q = 0.21 < 1.

Bước 2: Xây dựng dãy lặp:

Dãy lặp: $\varphi(x_n) = \varphi(x_{n-1}) = (1+x)^{1/3}$, với x_0 = 1.2 ∈ (1, 2).

Ta có, $q^n \times (b - a) \leq \varepsilon \Rightarrow n \geq \log_q \frac{\varepsilon}{b-a} = \log_{0.21} \frac{10^{-4}}{2-1} = 5.9$

Như vậy, cần lặp tối thiểu 6 lần để đạt độ chính xác ε = 10^{-4}.

Ta lập bảng:

n	φ(x)
1	1.2
2	1.30059
3	1.32011
4	1.32384
5	1.32455
6	1.32469
7	1.32471

Vậy nghiệm gần đúng là: $x_7 \approx 1.32471$

Bấm máy:

- *Xóa bộ nhớ: Shift 9 3 = =*
- *Lập công thức:*

$$Y = (1 + X)^{1/3} : X = Y$$

- *Bấm CALC để nhập x_0*
- *Bấm = để thu được x_n.*

Dạng 3: Đề bài không cho sẵn hàm φ(x), chúng ta phải đi tìm hàm φ(x)

Ví dụ 3: Cho phương trình $x^3 - x - 1 = 0$. Chứng minh rằng (1, 2) là một khoảng phân ly nghiệm của phương trình trên. Dùng phương pháp lặp để tìm nghiệm gần đúng của phương trình đa cho.

Giải:

Chứng minh (1, 2) là khoảng phân ly nghiệm?

Ta có, $f(1) \times f(2) = -1 \times 5 < 0$ (1)

Và, $f(x) = x^3 - x - 1 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 1 \Rightarrow f''(x) = 6x > 0\ \forall x \in (1, 2)$

$\Rightarrow f'(x)$ đồng biến trên khoảng (1, 2)

$\Rightarrow f'(x) \geq f'(1) = 2 > 0\ \forall x \in (1, 2)$

$\Rightarrow f'(x)$ không đổi dấu trên (1, 2) (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ Khoảng (1, 2) là một khoảng phân ly nghiệm.

Bước 1: Tìm hàm lặp

Từ $x^3 - x - 1 = 0$ ta được $\left[\begin{array}{l} x = x^3 - 1 = \varphi_1(x) \\ x = (1+x)^{1/3} = \varphi_2(x) \\ x = \dfrac{1}{x^2 - 1} = \varphi_3(x) \end{array}\right.$

Kiểm tra $\varphi_1(x) = x^3 - 1$

$\Rightarrow \varphi'_1(x) = 3x^2 \Rightarrow \varphi''(x) = 6x > 0\ \forall x \in (1, 2)$

$\Rightarrow \varphi'_1(x)$ đồng biến trên (1, 2)

$\Rightarrow \varphi'_1(x) \geq \varphi'_1(1) = 3 > 1$ (Loại)

Kiểm tra $\varphi_2(x) = (1+x)^{1/3} \rightarrow \varphi'_2(x) = \frac{1}{3}(1+x)^{-2/3}$

$$\rightarrow \varphi''_2(x) = \frac{-2}{9}(1+x)^{-5/2} < 0, \forall x \epsilon (1,2)$$

$\Rightarrow \varphi'_2(x)$ nghịch biến trên (1, 2)

$\Rightarrow \varphi'_2(2) \leq \varphi'_2(x) \leq \varphi'_2(1)$

$\Rightarrow 0.16 \leq \varphi'_2(x) \leq 0.21$

$\Rightarrow |\varphi'_2(x)| \leq \max\{0.16, 0.21\} = 0.21 = q$

Bước 2: Xây dựng dãy lặp:

(Xem lại phần này ở Dạng 2)

Bài tập: Cho phương trình: $4x - \frac{1}{(x+1)^2} = 0$ (1). Đặt $\varphi(x) = \frac{1}{4(x+1)^2}$. Sử dụng phương pháp lặp để tìm nghiệm trên (0, 1)

a) Chứng tỏ rằng $\varphi(x)$ có thỏa mãn các điều kiện hội tụ trong khoảng (0, 1)
b) Tìm nghiệm gần đúng của phương trình (1) trong khoảng (0, 1) với độ chính xác $\varepsilon = 10^{-3}$.