Tính gần đúng đạo hàm và tích phân xác định – Chương 5

1) Tính gần đúng đạo hàm:

Phương pháp:

Giả sử y = f(x) trên [a, b] có bảng nội suy cách đều:

x	x_0	x_1	…	x_n
y	y_0	y_1	…	y_n

Bước 1: Đi tìm đa thức nội suy Newton f(x) ≈ P(x)

Bước 2: Tính gần đúng đạo hàm: f ’(x*) ≈ P’(x*)

Ví dụ 1: Cho bảng giá trị của hàm y = f(x) như sau:

x	50	55	60	65
y	1.699	1.7404	1.7782	1.8139

Tính gần đúng đạo hàm tại x = 50.

Giải:

Có 4 nút nội suy, ta có:

$P_3(x) = P_3(x=x_0+ht) = y_0 + t\Delta_{y_0} + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2_{y_0} + \frac{t(t-1)(t-2)}{3!}\Delta^3_{y_0}$

Với $x_0 = 50$ và h = 5

Ta lập bảng:

i	**x_i**	**y_i**	**Hiệu hữu hạn cấp 1**	**Hiệu hữu hạn cấp 2**	**Hiệu hữu hạn cấp 3**
0	50	1.699			
			0.0414		
1	55	1.7404		-0.0036	
			0.0378		0.0015
2	60	1.7782		-0.0021	
			0.0357		
3	65	1.8139			

Đa thức cần tìm là:

$P_3(x = 50 + 5t) = P_3(t) = 1.699 + 0.0414t - \frac{0.0036t(t-1)}{2!} + \frac{0.0015t(t-1)(t-2)}{3!}$

$$\rightarrow P_3'(t) = [0.0414 - 0.0018(2t-1) + 0.00025(3t^2 - 6t + 2)] \times \frac{1}{5}$$

Tại x = 50 → $t = \frac{x-x_0}{h} = \frac{50-50}{5} = 0$, thay t = 0 vào $P_3'(t)$, ta được:

$$P_3'(t=0) = [0.0414 - 0.0018(2\times 0 - 1) + 0.00025(3\times 0^2 - 6\times 0 + 2)] \times \frac{1}{5}$$

$$= 0.0085.$$

Vậy, f ‘(x = 50) ≈ $P_3'(t=0) = 0.0085$

2) Tính gần đúng tích phân xác định:

2.1. Công thức hình thang:

Phương pháp:

Chia đoạn [a, b] thành n đoạn bằng nhau $[x_0, x_1], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$, với n + 1 nút nội suy cách đều:

$x_0 = a, \ldots, x_n = a + n \times h = b$

$$\rightarrow h = \frac{b-a}{n}$$

Ta có công thức tổng quát như sau:

$$I = \int_a^b f(x)d(x) \approx \frac{h}{2} \times [(y_0 + y_n) + 2(y_1 + \cdots + y_{n-1})]$$

Ví dụ 2: Tính gần đúng tích phân $I = \int_0^1 x \times e^{-x}\,dx$ bằng công thức hình thang với đoạn [0, 1] được chia thành 4 đoạn bằng nhau.

Giải:

Ta có: f(x) = $x \times e^{-x}$, $x_0 = 0$, $x_n = 1$, n = 4 và $h = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{4} = \frac{1}{4}$

Bảng giá trị của hàm f(x) là:

x	$\boldsymbol{y = x \times e^{-x}}$
0	0
$1/4$	0.1947
$1/2$	0.3033
$3/4$	0.3543
1	0.3679

Bấm máy:

- *Xóa bộ nhớ: Shift 9 3 = =*
- *Lập công thức:*

$$Y = X \times e^{-X} : X = X + ¼$$

- *Bấm CALC*
- *Nhập X = 0 thì ra giá trị của f(x) khi x = 0 …*

Áp dụng công thức hình thang, ta được:

$$I = \int_0^1 x \times e^{-x}\,dx \approx \frac{h}{2}[(y_0 + y_n) + 2(y_1 + y_2 + y_3)]$$

$$\approx \frac{1/4}{2}[(0+0.3679)+2(0.1947+0.3033+0.3543)] \approx 0.2509$$

2.2. Công thức Simson:

Phương pháp:

Chia đoạn [a, b] thành n đoạn (n chẵn) với n+1 nút nội suy cách đều nhau:

$x_0 = a, \ldots, x_n = a + n \times h = b$ với $h = \frac{b-a}{n}$

Ta có công thức tổng quát như sau:

$$I = \int_a^b f(x)d(x) \approx \frac{h}{3} \times [(y_0 + y_n) + 4(y_1 + y_3 + \cdots + y_{n-1}) + 2(y_2 + y_4 \ldots + y_{n-2})]$$

Ví dụ 3: Tính gần đúng tích phân sau bằng công thức Simson bằng cách chia [0.5, 1.5] thành 8 đoạn bằng nhau: $I = \int_{0.5}^{1.5} \frac{\sin(x)}{x} d(x)$

Giải:

Ta có: $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}, x_0 = 0.5, x_n = 1.5, n = 8, h = \frac{b-a}{n} = \frac{1.5-0.5}{8} = 0.125$

Ta có bảng giá trị của hàm f(x) là:

x	$y = \frac{sin(x)}{x}$
0.5	0.9589
0.625	0.9362
0.75	0.9089
0.875	0.8772
1	0.8415
1.125	0.802
1.25	0.7592
1.375	0.7134
1.5	0.665

Bấm máy:

- *Xóa bộ nhớ: Shift 9 3 = =*
- *Chuyển đổi sang Radian: Shift MODE 4*
- *Lập công thức:*

$$Y = \frac{sin(X)}{X} : X = X + 0.125$$

- *Bấm CALC để nhập dữ liệu x_0*

Áp dụng công thức SimSon, ta có:

$$I = \int_{0.5}^{1.5} \frac{\sin(x)}{x} d(x) \approx \frac{h}{3} \times [(y_0 + y_8) + 4(y_1 + y_3 + y_5 + y_7) + 2(y_2 + y_4 + y_6)]$$

$$\approx \frac{h}{3} \times [(0.9589 + 0.6650) + 4 \times (0.9362 + 0.8772 + 0.8020 + 0.7134) + 2 \times (0.9089 + 0.8415 + 0.7592)]$$

≈ 0.8316

Bài tập 1: Tính gần đúng $I = \int_1^{1.6} \sqrt{x^3 - 1} dx$ bằng công thức SimSon với đoạn [1, 1.6] được chia thành 6 đoạn bằng nhau.

Bài tập 2: Cho hàm y = f(x) với bảng số liệu sau:

x	1.2	1.3	1.4	1.5
y	-4.38	-2.16	0	2.55

a) Dùng phương pháp bình phương bé nhất tìm hàm y = ax + b gần với hàm f(x) nhất.

b) Tính gần đúng đạo hàm f ’(1.4).

Bài tập 3: Tính gần đúng tích phân $I = \int_2^4 x.\ln(x) dx$ bằng công thức hình thang với việc chia đoạn [2, 4] thành 8 đoạn con bằng nhau.

Bài tập 4: Cho hàm y = f(x) với bảng giá trị sau:

x	2.2	2.3	2.4	2.55
y	1.772	2.635	2	1.094

a) Dùng đa thức nội suy Lagrange để xác định đa thức gần đúng với hàm y = f(x).

b) Tính gần đúng đạo hàm y'(2.2) và y'(2.4).

c) Tính gần đúng đạo hàm y'(2.5).

Lưu ý: Cách tính gần đúng đạo hàm có 2 trường hợp:

- **Trường hợp 1:** x* không trùng với các nút nội suy

  Dùng đa thức nội suy:

$$f'(x^*) \approx P_n'(x^*)$$

- **Trường hợp 2:** x* trùng với nút nội suy

  Dùng một trong 3 cách sau:

  - *Cách 1:* Sử dụng Trường hợp 1.
  - *Cách 2:* Áp dụng công thức: $f'(x) \approx \frac{f(x_{i+1})-f(x_i)}{x_{i+1}-x_i}$
  - *Cách 3:* Áp dụng công thức: $f'(x) \approx \frac{f(x_{i-1})-f(x_i)}{x_{i-1}-x_i}$