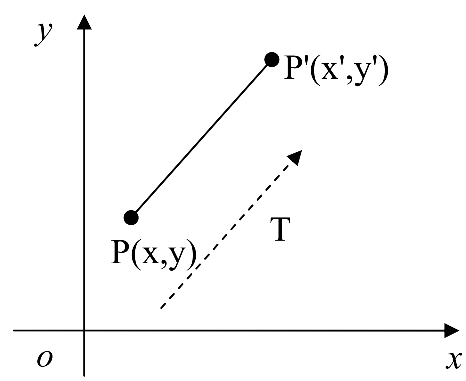
Chương 3
Các phép biến đổi trong không gian đồ hoạ hai chiều và ba chiều

Trong đồ họa máy tính, các phép biến đổi tác động lên một đối tượng hình học nhằm mục đích thay đổi vị trí, hướng hoặc kích thước của nó được gọi là các phép biến đổi hình học (geometric transformations) hay còn gọi là các phép biến đổi mô hình (modeling transformations).Trong không gian đồ họa hai chiều và ba chiều ta có các phép biến đổi hình học cơ bản là tịnh tiến (translation), phép quay (rotation), phép tỉ lệ (scaling) và phép đối xứng (reflection). Các phép biến đổi khác là trường hợp đặc biệt hoặc là sự kết hợp của các phép biến đổi trên. Trong chương này ta sẽ đề cập đến cơ sở toán học của các phép biến đổi hình học thông qua các phương trình được biểu diễn dưới dạng ma trận tọa độ.

1. Các phép biến đổi trong không gian hai chiều

1.1 Phép tịnh tiến

Phép tịnh tiến theo véc tơ tịnh tiến $T(t_x, t_y)$ sẽ dời vị trí điểm P(x,y) đến vị trí mới P'(x',y') theo các phương trình sau: $x'=x+t_x$, $y'=y+t_y$



Hình 3.1: Phép tịnh tiến

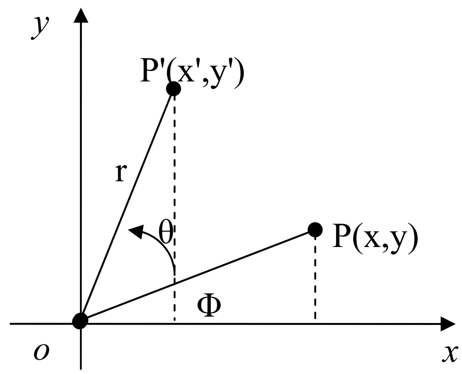
Nếu ta kí hiệu tọa độ các điểm và véc tơ như sau: $P=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, $P'=\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$, $T=\begin{bmatrix} t_x \\ t_y \end{bmatrix}$ khi đó phép tịnh tiến được mô tả bởi phương trình: $P'=\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}=P+T=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} t_x \\ t_y \end{bmatrix}$

Phép tịnh tiến không làm thay đổi hình dạng của vật thể (rigid-body).

1.2 Phép quay

Trong khônggian hai chiều ta xét phép quay vật thể quanh tâm quay (pivot point) $I(x_r,y_r)$ với góc quay θ (θ>0 nếu chiều quay ngược chiều kim đồng hồ và θ<0 nếu chiều quay cùng chiều kim đồng hồ).

Trước hết ta xét trường hợp đơn giản nhất đó là phép quay quanh gốc tọa độ, như trong hình 3.2



Hình 3.2: Phép quay có tâm quay là gốc tọa độ

Ta có các phương trình biến đổi sau:

$x' = r\cos(\Phi+\theta) = r\cos\Phi\cos\theta - r\sin\Phi\sin\theta$

$y' = r\sin(\Phi+\theta) = r\cos\Phi\sin\theta + r\sin\Phi\cos\theta$

Mặt khác ta lại có $x = r\cos\Phi$ và $y = r\sin\Phi$. Thay vào hai phương trình trên ta có:

$x' = x\cos\theta - y\sin\theta$

$y' = x\sin\theta + y\cos\theta$

Do đó phép quay được mô tả bởi phương trình

$$P' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = R.P = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Trường hợp tâm quay I không trùng gốc toạ độ ta sẽ xét sau.

Phép quay cũng giống như phép tịnh tiến không làm thay đổi hình dáng của vật thể

1.3 Phép tỉ lệ

Phép tỉ lệ sẽ nhân hoành độ và tung độ ban đầu với hệ số tỉ lệ s_x và s_y tương ứng, cụ thể ta sẽ có $x' = x.s_x$ và $y' = y.s_y$. Phương trình của phép biến đổi tỉ lệ có thể được mô ta như sau:

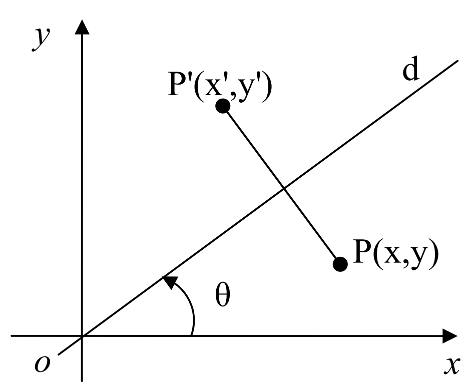
$$P' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = S.P = \begin{bmatrix} s_x & 0 \\ 0 & s_y \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Khi $(s_x, s_y) \neq (1, 1)$ phép biến đổi tỉ lệ sẽ làm thay đổi hình dáng của vật thể

Trường hợp đặc biệt: Khi $s_x=1$ và $s_y=-1$ phép tỉ lệ trở thành phép đối xứng Re_{ox} qua trục ox, tương tự nếu $s_x=-1$ và $s_y=1$ phép tỉ lệ trở thành phép đối xứng Re_{oy} qua trục oy

1.4 Phép đối xứng

Ta xét trường hợp phép đối xứng qua một đường thẳng d qua gốc toạ độ và tạo với ox một góc θ như trong hình 3.3.Ta kí hiệu phép biến đổi là Re_d



Hình 3.3: Phép đối xứng qua một đường thẳng qua gốc toạ dộ

Ta có thể thực hiện phép đối xứng trên bằng cách áp dụng liên tiếp các phép biến đổi theo thứ tự sau đây:

(1) Áp dụng phép quay R(-θ) đưa dường thẳng d về vị trí trục ox

(2) Áp dụng phép lấy đối xứng S_{ox} qua trục ox

(3) Áp dụng phép quay R(θ) đưa dường thẳng d về vị trí trí ban đầu

$$P'=\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}=Re_d.P= R(\theta).S_{ox}.R(-\theta).P=\begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

2. Tọa độ đồng nhất, các phép biến đổi ngược và kết hợp các phép biến đổi trong không gian hai chiều (Homogeneous Coordinates, Inverse Transformations and Composite Transformations)

2.1 Tọa độ đồng nhất

Ta có nhận xét rằng các phép biến đổi mô hình mà ta đã xét đều có thể minh họa bằng các phương trình ma trận trong đó phép quay và phép tỉ lệ được biểu diễn bằng phép nhân còn phép tịnh tiến được biểu diễn bằng phép cộng. Vấn đề đặt ra là khi ta kết hợp nhiều phép biến đổi với nhau thì ta sẽ không thể biểu diễn thông qua một ma trận tổng thể. Giải pháp cho vấn đề đó là sử dụng tọa độ đồng nhất. Với tọa độ đồng nhất ta biểu diễn tọa độ của một điểm (x,y) dưới dạng (x_h, y_h, h) trong đó $x=x_h/h$ và $y=y_h/h$.Với tọa độ đồng nhất ta thấy tọa độ của một điểm có vô số cách biểu diễn ứng với các giá trị h khác nhau. Để thuận tiện ta sẽ chọn h=1 khi đó điểm (x, y) sẽ có tọa độ đồng nhất là (x, y, 1). Phương trình của các phép biến đổi hình học sẽ được biểu diễn hoàn toàn bằng phép nhân ma trận như sau:

Phép tịnh tiến:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Phép quay:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Phép tỉ lệ:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

2.2 Các phép biến đổi ngược

Ta sẽ tìm ma trận biết đổi của các phép biến đổi ngược của các phép biến đổi mô hình.

Phép biến đổi ngược của phép tịnh tiến theo véc tơ tịnh tiến (t_x, t_y) sẽ là phép tịnh tiến theo véc tơ đối ($-t_x$, $-t_y$), ma trận của phép biến đổi là:

$$T^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -t_x \\ 0 & 1 & -t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Phép biến đổi ngược của phép quay quanh gốc tọa độ một góc θ là phép quay theo chiều ngược lại hay nói cách khác góc quay là -θ, ma trận của phép biến đổi là:

$$R^{-1}=\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Tương tự phép biến đổi ngược của phép tỉ lệ với hệ số (s_x, s_y) là phép biến đổi tỉ lệ với hệ số ($1/s_x$, $1/s_y$) và ma trận biến đổi là:

$$S^{-1}=\begin{bmatrix} 1/s_x & 0 & 0 \\ 0 & 1/s_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.3 Kết hợp các phép biến đổi trong không gian hai chiều

Sử dụng tọa độ đồng nhất cho phép ta biểu diễn các phép biến đổi mô hình bằng phép nhân ma trận và tìm ma trận biến đổi khi kết hợp các phép biến đổi với nhau.

a. Kết hợp hai phép tịnh tiến

Giả sử ta áp dụng liên tiếp hai phép tịnh tiến theo hai véc tơ ($t1_x$, $t1_y$) và ($t2_x$, $t2_y$) khi đó ta có:

$$P'=\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix}=T(t2_x, t2_y).\{T(t1_x, t1_y).P\}=\{T(t2_x, t2_y).T(t1_x, t1_y)\}.P$$

$$=\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 & t2_x \\ 0 & 1 & t2_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 1 & 0 & t1_x \\ 0 & 1 & t1_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}.\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & t1_x+t2_x \\ 0 & 1 & t1_y+t2_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$=T(t1_x+t2_x, t1_y+t2_y)$$

Chứng tỏ: $T(t1_x, t1_y).T(t2_x, t2_y)=T(t1_x+t2_x, t1_y+t2_y)$

b. Kết hợp hai phép quay

Áp dụng liên tiếp hai phép quay theo hai góc quay θ1 và θ2 với tâm quay là gốc toạ độ

$$P'=\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix}=R(\theta 2).\{R(\theta 1).P\}=\{R(\theta 2).R(\theta 1)\}.P$$

$$=\left\{\begin{bmatrix} \cos\theta 2 & -\sin\theta 2 & 0 \\ \sin\theta 2 & \cos\theta 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} \cos\theta 1 & -\sin\theta 1 & 0 \\ \sin\theta 1 & \cos\theta 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}.\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \cos(\theta 1+\theta 2) & -\sin(\theta 1+\theta 2) & 0 \\ \sin(\theta 1+\theta 2) & \cos(\theta 1+\theta 2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= R(\theta 1+\theta 2)$$

Chứng tỏ: $R(\theta 2).R(\theta 1)=R(\theta 1+\theta 2)$

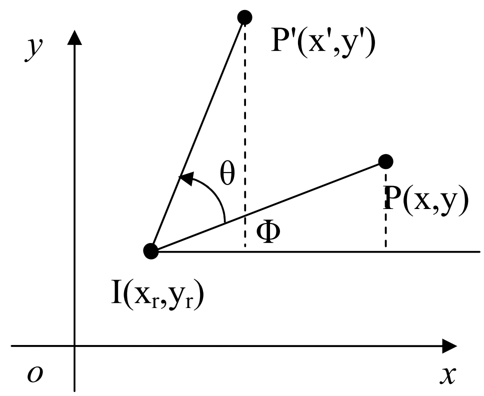
c. Kết hợp hai phép tỉ lệ

Tương tự như phép tịnh tiến và phép quay, khi kết hợp hai phép biến đổi tỉ lệ với hệ số là ($s1_x$, $s1_y$) và ($s2_x$, $s2_y$) ta có

$$S(s2_x, s2_y).\ S(s1_x, s1_y)=S(s1_x.s2_x,\ s1_y.s2_y)=\begin{bmatrix} s1_x.s2_x & 0 & 0 \\ 0 & s1_y.s2_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

d. Phép quay quanh một tâm quay bất kì

Trong mục 1.2 ta xét phép quay có tâm là gốc toạ độ, bây giờ ta xét trường hợp tổng quát khi tâm quay $I(x_r, y_r)$ không phải là gốc tọa độ như trong hình 3.3 ta kí hiệu phép quay đó là $R(x_r,y_r,\theta)$



Hình 3.4 Phép quay có tâm quay không là gốc tọa độ

Ta có thể thực hiện phép quay trên bằng cách áp dụng liên tiếp các phép biến đổi theo thứ tự sau đây:

(1) Áp dụng phép tịnh tiến $T(-x_r, -y_r)$ để tịnh tiến tâm quay về gốc toạ độ

(2) Áp dụng phép quay $R(\theta)$ quay đối tượng quanh gốc toạ độ một góc θ

(3) Áp dụng phép tịnh tiến $T(x_r, y_r)$ để tịnh tiến tâm quay từ gốc toạ độ về vị trí ban đầu

$$R(x_r,y_r,\theta)=T(x_r, y_r).R(\theta).T(-x_r, -y_r)$$

$$=\begin{bmatrix} 1 & 0 & x_r \\ 0 & 1 & y_r \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 1 & 0 & -x_r \\ 0 & 1 & -y_r \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & x_r(1-\cos\theta)+y_r\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta & y_r(1-\cos\theta)-x_r\sin\theta \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e. Phép đối xứng qua một đường thẳng bất kì

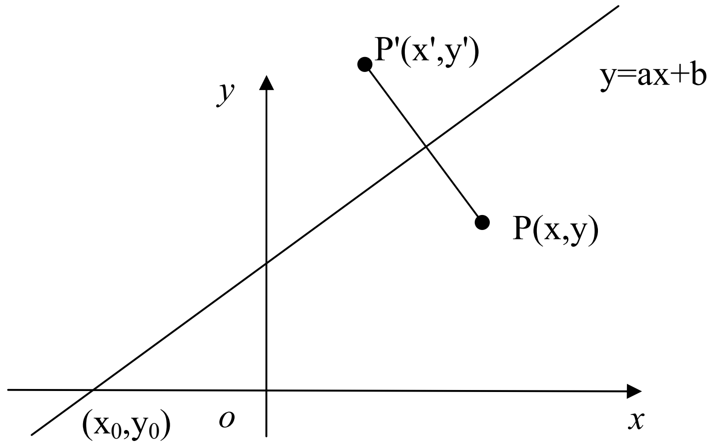
Trong trường hợp tổng quát nếu trục đối xứng là một đường thẳng d bất kì, ta thay phép đối xứng bằng cách áp dụng lần lượt các phép biến đổi sau:

(1) Áp dụng phép tịnh tiến đưa đường thẳng d về vị trí d' đi qua gốc toạ độ

(2) Áp dụng phép đối xứng qua đường thẳng d'

(3) Áp dụng phép tịnh tiến đưa đường thẳng d' về vị trí đường thẳng d ban đầu

Trường hợp 1: Đường thẳng d có phương trình y=ax+b, giả sử đường thẳng cắt trục ox tại điểm (x_0, y_0) như trong hình 3.4



Hình 3.4: Phép đối xứng qua đường thẳng y=ax+b

Theo nhận xét ở trên ta có

$Re_d = T(x_0, y_0) \,.\, Re_{d'} \,.\, T(-x_0, -y_0)$

($Re_{d'}$ là phép đối xứng qua một đường thẳng chạy qua gốc toạ độ mà ta đã biết trong mục 1.4)

Trường hợp 2: Đường thẳng d có phương trình $y=y_0$ (d song song với trục ox), khi đó

$Re_d = T(0, y_0) \,.\, Re_{ox} \,.\, T(0, -y_0)$

Trường hợp 3: Đường thẳng d có phương trình $x=x_0$ (d song song với trục oy), khi đó

$Re_d = T(x_0, 0) \,.\, Re_{oy} \,.\, T(-x_0, 0)$

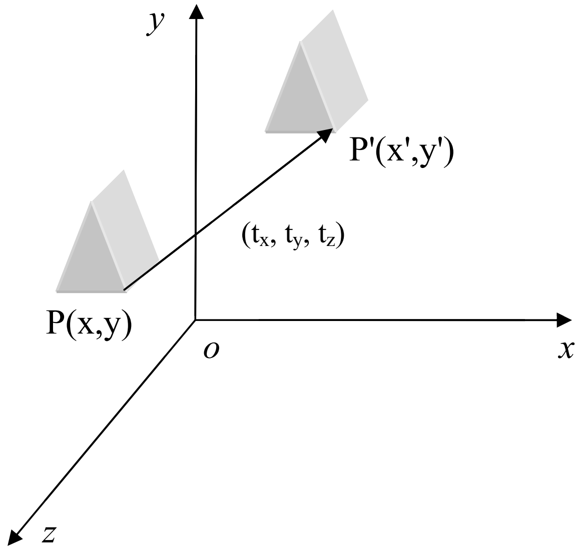
3. **Các phép biến đổi trong không gian ba chiều**

Trong không gian ba chiều ta cũng có các phép biến đổi giống như trong không gian hai chiều. Các phép biến đổi sẽ được minh hoạ qua các ma trận 4x4, toạ độ các điểm được biểu diễn theo toạ độ đồng nhất nghĩa là thay cho toạ độ (x, y, z) ta sẽ dùng (x, y, z, 1).

3.1 Phép tịnh tiến

Giả sử véc tơ tịnh tiến là (t_x, t_y, t_z) khi đó phương trình phép tịnh tiến như sau (T là ma trận của phép tịnh tiến):

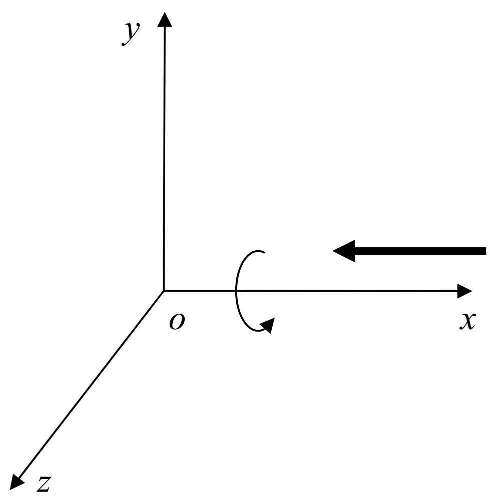
$$P' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = R.P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$



Hình 3.5: Phép tịnh tiến

3.2 Phép quay

Khi thực hiện phép quay trong không gian ba chiều ta cần phải biết trục quay và góc quay. Chiều của góc quay được xác định theo chiều cùng chiều kim đồng hồ (chiều âm) và ngược chiều kim đồng hồ (chiều dương) khi mắt nhìn dọc theo trục quay (ta sẽ gọi đó là hướng nhìn). Ví dụ phép quay minh hoạ trên hình 3.6 là phép quay theo chiều dương, trục quay ox và hướng nhìn là theo hướng âm của trục ox



Hình 3.6: Phép quay chiều dương, trục quay ox, hướng nhìn là hướng âm trục ox

a. Phép quay quanh các trục toạ độ

Trước hết ta xét các phép quay một góc θ theo các trục ox, oy, oz khi hướng nhìn là hướng âm của trục đó.

Phép quay quanh trục oz: Ta có thể có công thức biến đổi toạ độ bằng cách mở rộng công thức phép quay trong không gian hai chiều

$$\begin{cases} x' = x\cos\theta - y\sin\theta \\ y' = x\sin\theta + y\cos\theta \\ z' = z \end{cases}$$

Biểu diễn tương đương dưới dạng ma trận như sau

$$P' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = R_{oz}(\theta).P = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Phép quay quanh trục ox:

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y\cos\theta - z\sin\theta \\ z' = y\sin\theta + z\cos\theta \end{cases}$$

$$P' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = R_{ox}(\theta).P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Phép quay quanh trục oy:

$$\begin{cases} x' = x\cos\theta + z\sin\theta \\ y' = y \\ z' = -x\sin\theta + z\cos\theta \end{cases}$$

$$P' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = R_{oy}(\theta).P = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

b. Phép quay quanh một trục song song với trục toạ độ

Giả sử trục quay song song với trục ox (các trường hợp còn lại tương tự), ta thực hiện lần lượt các lệnh biến đổi sau:

(1) Áp dụng phép tịnh tiến T để đưa trục quay về trục ox

(2) Áp dụng phép quay R(θ) quay đối tượng quanh trục ox một góc θ

(3) Áp dụng phép tịnh tiến T^{-1} để đưa trục quay về vị trí ban đầu

c. Phép quay quanh một trục bất kì

Giả sử trục quay là một đường thẳng d đi qua hai điểm P1(x1, y1, z1) và P2(x2, y2, z2). Phép quay R(θ) quanh đường thẳng d một góc θ theo hướng nhìn từ điểm P2 tới P1. Ta thực hiện lần lượt các phép biến đổi sau:

(1) Áp dụng phép tịnh tiến đưa trục quay về vị trí đi qua gốc toạ độ

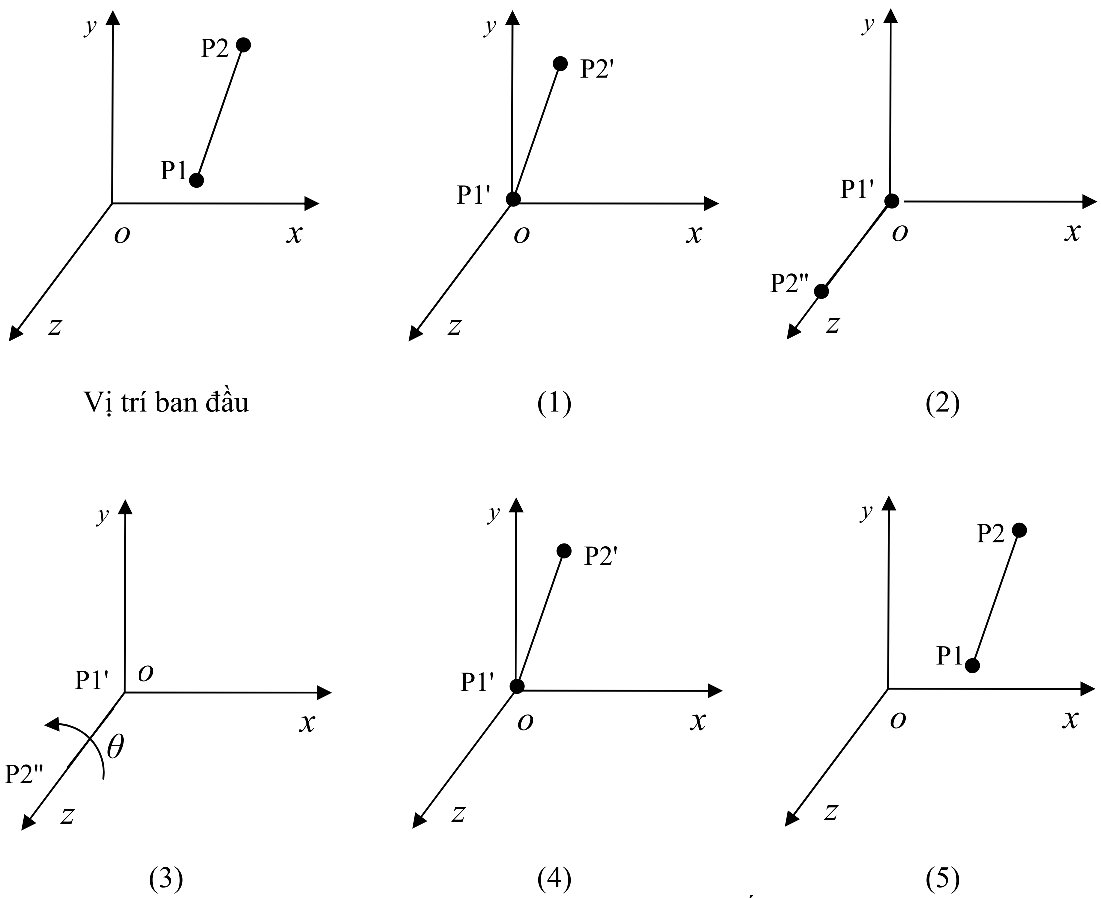
(2) Áp dụng phép quay đưa trục quay về vị trí trùng với một trục toạ độ

(3) Áp dụng phép quay vật thể quanh trục quay (trục toạ độ)

(4) Áp dụng phép quay đưa trục quay về vị trí tại bước 2

(5) Áp dụng phép quay đưa trục quay về vị trí ban đầu

Quá trình được minh hoạ trong hình 3.7



Hình 3.7: Phép quay quanh một trục bất kì

Ta sẽ tìm ma trận biến đổi của từng phép biến đổi theo từng bước

Bước 1: Tịnh tiến đưa điểm P1 về gốc toạ độ bằng cách tịnh tiến theo véc tơ (-x1, -y1, -z1), đoạn thẳng P1P2 chuyển thành P1'P2'. Ma trận phép biến đổi là: T= $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -x1 \\ 0 & 1 & 0 & -y1 \\ 0 & 0 & 1 & -z1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Bước 2: Đây là bước phức tạp nhất, đưa trục quay P1'P2' về trùng với một trục toạ độ, ta sẽ chọn đó là trục oz. Để thuận tiện ta sẽ chọn véc tơ đơn vị u thuộc đường thẳng P1'P2' và có hướng trùng với hướng của véc tơ V=P1'P2' như sau:

V=P1'P2'=P1P2=(x2-x1, y2-y1, z2-z1)

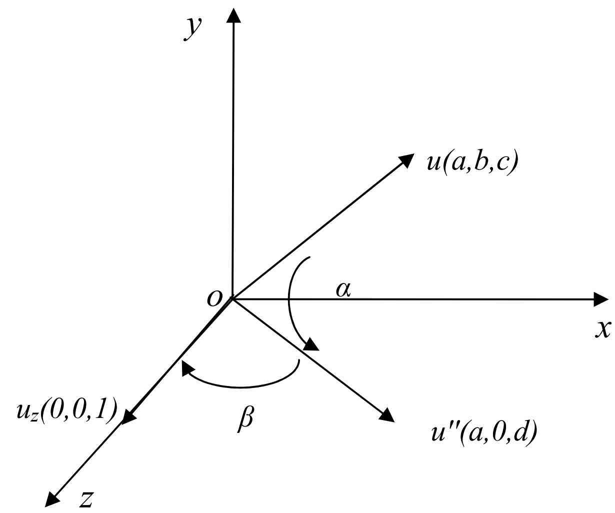
u= $\frac{V}{|V|}$ =(a, b, c) và ||u||= $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ =1

Mục đích bây giờ ta phải đưa véc tơ u về trục oz bằng cách áp dụng hai phép quay sau:

(1) Quay một góc α quanh trục ox đưa véc tơ u về vị trí véc tơ u'' nằm trên mặt phẳng xz

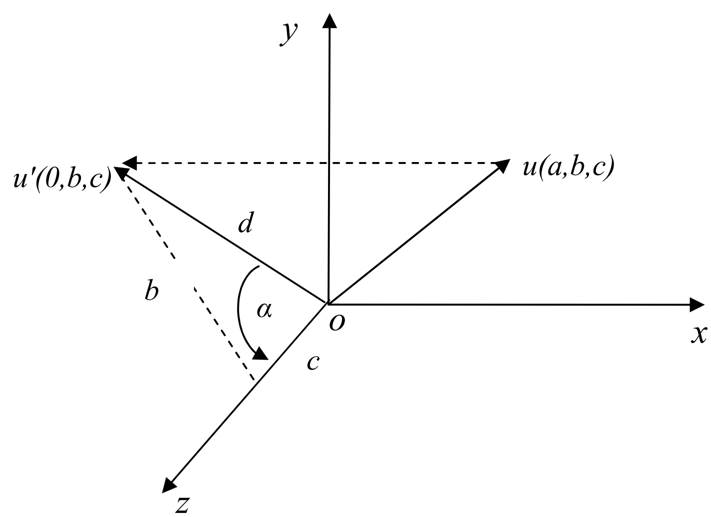
(2) Quay một góc β quanh trục oy đưa véc tơ u'' vị trí u_z thuộc trục oz

Quá trình được minh hoạ trong hình 3.8



Hình 3.8

Độ lớn của góc α chính bằng góc giữa véc tơ u'(0, b, c) (là hình chiếu của véc tơ u lên mặt phẳng yz) và chiều dương trục oz, như trong hình 3.9



Hình 3.9

Dễ thấy cosα=c/d, sinα=b/d với d=||u'||=$\sqrt{b^2+c^2}$. Sau phép quay một góc α quanh trục ox (hình 3.8) véc tơ u thành véc tơ u". Hoành độ của u" bằng x (vì phép quay quanh ox không làm thay đổi hoành độ), tung độ của u" bằng 0 và cao độ của u" bằng d (chính là độ dài của véc tơ u', ta có thể chứng minh điều này không mấy khó khăn).

$$R_{ox}(\alpha)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha & 0\\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & c/d & -b/d & 0\\ 0 & b/d & c/d & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Tương tự ta có cosβ=$\dfrac{u''u_z}{\|u''\|.\|u_z\|}$ =d (chú ý rằng ||u"||=||u_z||=1)

Theo định nghĩa tích có hướng của hai véc tơ ta có:

u" x u_z=u_y.||u"||.||u_z||. sinβ

Mặt khác u" x u_z=u_y.(-a) do đó sinβ=-a

$$R_{oy}(\beta)=\begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} d & 0 & -a & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ a & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Bước 3: Áp dụng phép quay một góc θ quanh trục oz

$$R_{oz}(\theta)=\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Bước 4 và bước 5: Áp dụng các phép biến đổi ngược đưa đường thẳng d về vị trí ban đầu

Tóm lại ta có phương trình ma trận kết hợp các phép biến đổi như sau:

$$R(\theta)=T^{-1}.R^{-1}_{ox}(\alpha).R^{-1}_{oy}(\beta).R_{oz}(\theta).R_{oy}(\beta).R_{ox}(\alpha).T$$

3.3 Phép tỉ lệ

Tương tự như phép tỉ lệ trong không gian hai chiều phương trình phép tỉ lệ trong không gian ba chiều như sau:

$$P'=\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix}=S.P=\begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

3.4 Phép đối xứng

Trong không gian ta có thể thực hiện phép đối xứng qua một đường thẳng hoặc qua một mặt phẳng. Trong mục này ta chỉ xét khi trục đối xứng là các trục toạ độ và mặt phẳng đối xứng là mặt phẳng xy, yz hoặc xz.

Nếu trục toạ độ là trục đối xứng thì phép đối xứng tương đương với phép quay 180^0 quanh trục đó. Ví dụ phép đối xứng qua trục ox có ma trận là:

$$Re_{ox}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos180^0 & -\sin180^0 & 0 \\ 0 & \sin180^0 & \cos180^0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Phép đối xứng qua mặt phẳng xy có ma trận biến đổi là:

$$Re_{xy}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Tương tự khi mặt phẳng đối xứng là xz hoặc yz